

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра высшей математики и методики преподавания математики

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по научно-методической
и учебной работе


«22» апреля 2020 г. Е.И. Скафа



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Направление подготовки:

01.03.01 Математика

Профиль подготовки:

Образовательная программа:

бакалавриат

Квалификация:

Академический бакалавр

Форма обучения:

очная

нужное подчеркнуть

Донецк 2020

УТВЕРЖДАЮ:

Декан факультета математики и
информационных технологий

И.А.Моисеенко

«16» апреля 2020 г.



Программа учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия» составлена на основании Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ГОС ВПО) Донецкой Народной Республики (ДНР) по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки ДНР от 04 апреля 2016 г. № 281;

порядка организации учебного процесса в образовательных организациях высшего профессионального образования Донецкой Народной Республики, утвержденного приказом Министерства образования и науки ДНР № 1171 от «10» ноября 2017 г.;

учебного плана и основной образовательной программы высшего профессионального образования направления подготовки 01.03.01 Математика, разработанных в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».

Разработчики:

Проф., д.ф.-м.н., кафедры высшей математики
и методики преподавания математики

Доц., к.ф.-м.н., кафедры высшей математики
и методики преподавания математики

А.В. Мазнев

Н.В. Коваленко

Программа учебной дисциплины утверждена на заседании кафедры высшей математики и методики преподавания математики

Протокол № 12 от «09» апреля 2020 г.

Заведующий кафедрой

Е.И. Скафа

Программа учебной дисциплины одобрена учебно-методической комиссией факультета математики и информационных технологий

Протокол № 8 от «15» апреля 2020 г.

Председатель учебно-методической
комиссии факультета

Л.И. Селякова

1. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ И МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Данная дисциплина относится к базовой части профессионального цикла в ООП 01.03.01 Математика. Для ее изучения необходимо знать: основные понятия и утверждения из математического анализа (формулы Тейлора, теорема о неявной функции, обобщенные формулы Ньютона-Лейбница, условие полной интегрируемости, приемы интегрирования); теоремы существования и единственности обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, основные понятия линейной алгебры и аналитической геометрии. Дисциплина углубляет знание основных понятий из математического анализа, дифференциальных уравнений, аналитической геометрии и является необходимой базой при изучении дисциплин: «Теоретическая механика»; «Математическое моделирование»,

2. СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Данная дисциплина разбита на два содержательных модуля: теория кривых и теория поверхностей

Характеристика учебной дисциплины					
Программа ВПО:	бакалавриат				
Направление подготовки	01.03.01 Математика				
Профиль	Общий				
Количество содержательных модулей	2				
Дисциплина базовой / вариативной части образовательной программы	Базовая часть профессионального блока				
Формы контроля	2 модульный контроль, 1 экзамен				
Показатели	очная форма обучения на базе		заочная форма обучения на базе		
	ОСО	СПО (сокращ.)	ОСО	СПО (сокращ.)	ВПО (сокращ.)
Количество зачетных единиц (кредитов)	4				
Год подготовки	2				
Семестр	3				
Количество часов	144				
- лекционных	36				
- практических, семинарских	36				
- лабораторных					
- самостоятельной работы	72				
в т.ч. индивидуальное задание					
Недельное количество часов,					
в т.ч. аудиторных					

3. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Является основой для изучения следующих дисциплин: топологии, математического моделирования, оснований геометрии и других.

Целью курса является: изучение методов исследования локальных свойств кривых и поверхностей, классификация кривых и поверхностей на основе инвариантов, изучение метрики в евклидовой и римановой геометрии, освоение фундаментальных понятий метрических и топологических пространств, компактности, связности, формирования навыков использования приложений геометро-топологических конструкций и методов в процессе дальнейшего обучения.

Задаaniem курса является: освоение аппарата дифференциальной геометрии и развитие математической культуры будущего математика-исследователя.

Требования к результатам освоения дисциплины: процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ГОС ВПО по данному направлению подготовки (специальности):

а) общекультурных (ОК):

- способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве (ОК-3);
- способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-6);

б) профессиональные компетенции (ПК):

в научно-исследовательской деятельности: способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области (ПК-1); способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи (ПК-2); способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата (ПК-3); способность публично представлять собственные и известные научные результаты (ПК-4);

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

Знать:

- способы задания кривых и поверхностей,
- теоремы о представлении кривой и поверхности в окрестности обыкновенной точки,
- основные теоремы теории кривых и теории поверхностей (т. Бонне),
- понятия репера Френе, формулы Френе, классификацию кривых на основе инвариантов,
- типы особых точек плоских аналитических кривых, эволюту и эвольвенты плоских кривых,
- первую и вторую квадратичные формы на поверхности,
- определение нормальной и геодезической кривизны в данной точке поверхности, теоремы о геодезических линиях,
- теоремы об изометрических поверхностях, свойства поверхностей с постоянной полной кривизной,

Уметь:

- задавать кривую и поверхность явно, неявно и в параметрическом виде,
- находить длины кривых и переходить к натуральной параметризации,
- вычислять кривизну и кручение пространственной кривой,
- определять уравнения элементов трехгранника Френе,
- вычислять первую и вторую квадратичные формы поверхности,
- находить углы между кривыми и площадь куска поверхности,
- определять главные направления и вычислять главные кривизны поверхности,
- проводить классификацию типов точек на поверхности,
- вычислять геодезические кривизны линий на поверхности,
- исследовать геодезические линии на поверхности,
- проводить классификацию поверхностей на основе инвариантов,
- исследовать свойства изометрических поверхностей,
- проводить измерения длин кривых на поверхности для евклидовой и римановой метрик,

Владеть:

- основами знаний курса математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциальных уравнений,
- навыками применения частных производных вектор-функции к исследованию свойств кривых и поверхностей,

- владеть критерием связности,
- владеть теоремой Эйлера.

4. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ И ФОРМЫ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

В рамках изучения дисциплины предусмотрены следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические (лабораторные) занятия, самостоятельную работу студента.

Лекционные занятия предполагают овладение теоретическими основами дисциплины, лабораторные – для овладения методами решения примеров и задач.

Самостоятельная работа студентов предусматривает выполнение домашних заданий, подготовку к практическим занятиям, изучение учебно-методической литературы, составление конспектов, подготовку презентаций и докладов.

Текущий контроль осуществляется путем написания самостоятельных и контрольных работ по решению практических заданий, модульных контрольных работ по проверке знаний теоретических положений (определений, теорем и их доказательств).

В учебном процессе применяются активные и интерактивные формы проведения занятий, внеаудиторная самостоятельная работа, балльно-рейтинговая система оценки успеваемости, личностно-ориентированное обучение, проблемное обучение.

Материал излагается с использованием объяснительно-иллюстративных, эвристических и исследовательских методов преподавания.

Порядковый номер и тема	Краткое содержание темы
Содержательный модуль 1. Теория кривых	
Тема 1. Первоначальные сведения о кривых на плоскости	Способы задания кривой на плоскости. Обыкновенные и особые точки на кривой. Строение кривой вблизи обыкновенной точки. Строение кривой вблизи особой точки. Основные факты..
Тема 2. Вектор-функция одной переменной	Определение вектор-функции. Предел вектор-функции. Непрерывность вектор-функции. Дифференцируемость вектор-функции. Ряд Тейлора для вектор-функции. Интегрируемость вектор-функции. Касательная к кривой. Уравнения касательной. Длина кривой. Естественная (натуральная) параметризация кривой. Бирегулярные кривые.
Тема 3. Сопровождающий трехгранник. Формулы Френе.	Соприкасающаяся плоскость и ее уравнение. Сопровождающий трехгранник (трёхгранник Френе) и его элементы. Формулы Френе для пространственной кривой.
Тема 4. Кривизна и кручение кривой. Основная теорема теории кривых. Классификация кривых.	Кривизна и кручение пространственной кривой. Основные формулы для вычисления кривизны и кручения. Натуральные уравнения пространственных кривых. Основная теорема теории кривых. Классификация кривых по их натуральным уравнениям.
Тема 5. Исследование плоских кривых	Касание кривых. Соприкосновение плоских кривых. Соприкасающаяся окружность. Эволюты и эвольвенты плоских кривых. Огибающая семейства кривых. Асимптоты. Асимптоты

	алгебраических кривых. Строение плоской кривой в окрестности произвольной точки
Содержательный модуль 2. Теория поверхностей	
Тема 6. Первоначальные сведения по теории поверхностей	Основные способы задания поверхностей. Задание поверхности в виде вектор-функции двух переменных. Обыкновенные и особые точки поверхности. Кривые на поверхности. Координатные линии на поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
Тема 7. Первая и вторая квадратичные формы на поверхности.	Понятие о первой квадратичной форме поверхности. Измерение длин, углов и площадей на поверхности. Понятие изометрии. Изометричные поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности.
Тема 8. Кривизна кривой на поверхности	Основная формула для кривизны кривой на поверхности. Нормальная кривизна поверхности и геодезическая кривизна поверхности. Нормальная кривизна поверхности в данном направлении. Главные кривизны и главные направления. Теорема Родрига. Формула Эйлера. Индикатриса Дюпена.
Тема 9 Классификация точек на поверхности.	Гауссова и средняя кривизна поверхности. Эллиптические, гиперболические и параболические точки. Основная теорема теории поверхностей.
Тема 10. Классификация линий на поверхности..	Линии кривизны. Асимптотические линии. Геодезические линии. Кратчайшие линии на поверхности. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.

Тематический план

Названия содержательных модулей и тем	Количество часов										
	Очная форма обучения						Заочная форма обучения				
	всего	в т.ч.					в т.ч.				
		лекции	практические	лабораторные	самостоятельная работа	инд. работа	всего	лекции	практические	лабораторные	самостоятельная работа
	Содержательный модуль 1										
Тема 1. Первоначальные сведения о кривых на плоскости.	12	3	3		6						
Тема 2. Вектор-функция одной переменной	16	4	4		8						
Тема 3. Сопровождающий трехгранник. Формулы Френе.	16	4	4		8						
Тема 4. Кривизна и кручение кривой. Классификация кривых.	12	3	3		6						
Тема 5. Исследование плоских кривых	16	4	4		8						

Итого по содержательному модулю 1	72	18	18		36							
Содержательный модуль 2												
Тема 6. Первоначальные сведения теории поверхностей	12	3	3		6							
Тема 7. Первая и вторая квадратичные формы поверхности.	16	4	4		8							
Тема 8. Кривизна кривой на поверхности	16	4	4		8							
Тема 9. Классификация точек на поверхности.	12	3	3		6							
Тема 10. Классификация линий на поверхности.	16	4	4		8							
Итого по содержательному модулю 2	72	18	18		36							
Всего часов	144	36	36		72							

5. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЛЕКЦИОННЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Темы лекционных занятий

№ п/п	Название темы	Количество часов
1	Первоначальные сведения о кривых на плоскости и в пространстве. История развития понятия «кривая»	3
2	Вектор-функция одной переменной (определение, предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость)	4
3	Сопровождающий трехгранник (касательная, бинормаль, главная нормаль). Формулы Френе	4
4	Кривизна и кручение кривой. Основная теорема теории кривых. Классификация кривых	3
5	Исследование плоских кривых (особые точки, асимптоты, эволюты, эвольвенты)	4
6	Первоначальные сведения теории поверхностей (способы задания, регулярные поверхности, касательная плоскость, нормаль)	3
7	Первая и вторая квадратичные формы поверхности (метрические измерения на поверхности, отклонение точек, лежащих на поверхности от касательной плоскости)	4
8	Кривизна кривой на поверхности. Индикатриса Дюпена	4
9	Классификация точек на поверхности. Три типа точек	3
10	Классификация линий на поверхности (геодезические, кратчайшие).	4

	ВСЕГО	36
--	--------------	-----------

Темы практических занятий

№ п/п	Название темы	Количество часов
1	Первоначальные сведения о кривых на плоскости и в пространстве	3
2	Вектор-функция одной переменной	4
3	Сопровождающий трехгранник. Формулы Френе	4
4	Кривизна и кручение кривой. Классификация кривых	3
5	Исследование плоских кривых	4
6	Первоначальные сведения теории поверхностей	3
7	Первая и вторая квадратичные формы поверхности.	4
8	Кривизна кривой на поверхности	4
9	Классификация точек на поверхности.	3
10	Классификация линий на поверхности..	4
	ВСЕГО	36

6. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Организация самостоятельной работы студентов

№ п/п	Название темы	Количество часов
1	Первоначальные сведения о кривых на плоскости и в пространстве. История трансформации определения кривой.	14
2	Вектор-функция одной переменной. Регулярные кривые и способы их задания.	14
3	Сопровождающий трехгранник. Формулы Френе. «Кривая» Пеано.	14
4	Кривизна и кручение кривой. Классификация кривых. Кривые с постоянным отношением кривизны и кручения.	14
5	Исследование плоских кривых. Кривые в механике. Узлы. Полином Александера. Кривые в n -мерном евклидовом пространстве.	14
6	Первоначальные сведения теории поверхностей. Поверхности 2-го порядка. Линейчатые поверхности. Поверхности вращения.	14
7	Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Минимальные поверхности. Измерения на поверхности.	15
8	Кривизна кривой на поверхности. Исследование геодезических и кратчайших на поверхности.	15
9	Классификация точек на поверхности. Связь типа точек на поверхности с видом индикатрисы Дюпена.	15

10	Классификация линий на поверхности.	15
	ВСЕГО	144

7. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ СОДЕРЖАТСЯ В МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЯХ

Образец выполнения индивидуального задания

Исследуйте поверхность $\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, u^2)$

1. Естественная область определения поверхности $\begin{cases} v \in (0; 2\pi) \\ u \in R \end{cases}$.
2. Регулярность.

Находим \vec{r}_u и \vec{r}_v : $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 2u)$, $\vec{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$.

Вычисляем $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u)$.

Для выяснения вопроса о выполнении условия $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, заменим его на $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \neq 0$. Имеем $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = |u| \sqrt{4u^2 + 1}$. Очевидно, что $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = 0$ при $u = 0$. Таким образом при $u = 0$ имеем особую точку $M(0; 0; 0)$

Вывод: поверхность с особой точкой.

3. Нет необходимости.
4. Найдем уравнения координатных линий и выясним геометрический образ этих кривых.

Так как наша поверхность представляет собой поверхность вращения, а именно параболоид вращения $z = x^2 + y^2$, то определение семейств координатных линий очень простое, это меридианы и параллели поверхности вращения. Параболоид вращения образовался в результате вращения части параболы $y = u, z = u^2$, лежащей в первом квадранте плоскости (yz) . Поэтому одно семейство координатных линий представляет собой семейство парабол (плоских линий, образованных пересечением параболоида вращения с плоскостями, проходящими через ось OZ), а второе семейство - это семейство окружностей (пересечение параболоида плоскостями $z = \text{const}$).

В общем же случае надо находить кривизну и кручение координатных линий и устанавливать их геометрический образ.

а) u – линия $v = \text{const}$

$\vec{r} = (c_1 u, c_2 u, u^2); \quad c_1^2 + c_2^2 = 1 \rightarrow$ семейство парабол

Найдем кривизну по формуле $k = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3}$

$$\bar{r}' = (c_1, c_2, 2u), \quad \bar{r}'' = (0, 0, 2), \quad \bar{r}' \times \bar{r}'' = (2c_2; -2c_1; 0),$$

$$|\bar{r}' \times \bar{r}''| = \sqrt{4c_2^2 + 4c_1^2} = \sqrt{4(c_2^2 + c_1^2)} = \sqrt{4} = 2, \quad |\bar{r}'| = \sqrt{1 + 4u^2}.$$

Таким образом: $k = \frac{2}{(1+4u^2)^{3/2}}.$

Находим кручение по формуле: $\alpha = \frac{(\bar{r}' \times \bar{r}'') \cdot \bar{r}'''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|^2}.$

Так как $\bar{r}''' = \bar{0} \Rightarrow \alpha \equiv 0$ – семейство плоских кривых - парабол.

б) v – линия $u = \text{const}.$

Имеем, $\bar{r} = (c_1 \cos v; c_1 \sin v; c_2)$. Это семейство окружностей $x^2 + y^2 = c_1^2$, ($R = c_1$), лежащих в плоскостях $z = c_2 = \text{const}$. Очевидно, что это плоские кривые.

5. Составим уравнения касательной плоскости и нормали в данной точке поверхности.

Полагаем $u_0 = 1$, $v_0 = \frac{\pi}{2}$. Тогда точка на поверхности имеет следующие декартовы координаты $P(0; 1; 1)$.

Далее, $\bar{r}_u = (\cos v, \sin v, 2u)\bar{I}_P = (0; 1; 2)$, $\bar{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)\bar{I}_P = (-1; 0; 0)$.

Уравнение касательной плоскости находим из равенства $\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, т.е.

$2y - z - 1 = 0$ – касательная плоскость.

Уравнение нормали задается в виде $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

6. Найдем первую квадратичную форму:

$$I(du, dv) = d\bar{r}^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2.$$

$$E = \bar{r}_u^2 = 1 + 4u^2, \quad F = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = 0, \quad G = \bar{r}_v^2 = u^2.$$

$$I(du, dv) = (1 + 4u^2)du^2 + u^2 dv^2$$

7. Вычислим угол между координатными линиями. Так как $F = 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$. Таким образом, координатная сеть ортогональна, за исключением особой точки.

8. Найдем или оценим площадь части поверхности.

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_D \sqrt{(1 + 4u^2)u^2} du dv = \left\{ D: \begin{cases} u \in [1, 2] \\ v \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \right\} = \\
&= \int_1^2 \sqrt{(1 + 4u^2)u^2} du \int_{\pi/4}^{\pi/2} dv = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{8} (1 + 4u^2)^{1/2} d(1 + 4u^2) = \\
&= \frac{\pi}{32} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4u^2)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{48} (17^{3/2} - 5^{3/2})
\end{aligned}$$

9. Найдем вторую квадратичную форму.

$$\begin{aligned}
\bar{r}_u &= (\cos v, \sin v, 2u), \quad \bar{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0), \\
\bar{r}_u \times \bar{r}_v &= (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u), \quad |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| = |u| \sqrt{4u^2 + 1} \\
\bar{n} &= \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} = \left(\frac{-2u \cos v}{\sqrt{4u^2 + 1}}, \frac{-2u \sin v}{\sqrt{4u^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 1}} \right) \\
\bar{r}_{uu} &= (0, 0, 2), \quad \bar{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0), \quad \bar{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0) \\
L &= \bar{r}_{uu} \cdot \bar{n} = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 1}}, \quad M = \bar{r}_{uv} \cdot \bar{n} = 0, \quad N = \bar{r}_{vv} \cdot \bar{n} = \frac{2u^2}{\sqrt{4u^2 + 1}}
\end{aligned}$$

$$\Pi(du, dv) = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 1}} du^2 + \frac{2u^2}{\sqrt{4u^2 + 1}} dv^2$$

10. Составим уравнение индикатрисы Дюпена и определим геометрическое место точек.

$$\left| \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 1}} x^2 + \frac{2u^2}{\sqrt{4u^2 + 1}} y^2 \right| = 1, \quad u \neq 0 \quad (\text{область регулярности поверхности}).$$

$$\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 1}} > 0 \quad u \quad \frac{2u^2}{\sqrt{4u^2 + 1}} > 0 \Rightarrow \text{геометрическое место точек} - \text{эллипс}.$$

11. Найдем главные кривизны поверхности, гауссову и среднюю кривизны.

По формуле $\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0$ находим

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 1}} - k(1 + 4u^2) & 0 \\ 0 & \frac{2u^2}{\sqrt{4u^2 + 1}} - ku^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 1}} - k(1 + 4u^2) \right) \cdot \left(\frac{2u^2}{\sqrt{4u^2 + 1}} - ku^2 \right) = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 1}} = k_1(1 + 4u^2), \quad \frac{2u^2}{\sqrt{4u^2 + 1}} = k_2 u^2$$

$$k_1 = \frac{2}{(4u^2 + 1)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 1}}$$

Таким образом, имеем $K = k_1 \cdot k_2 = \frac{4}{(4u^2+1)^2}$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{(4u^2+1)^{3/2}} + \frac{1}{(4u^2+1)^{1/2}} = \frac{2+4u^2}{(4u^2+1)^{3/2}}$$

12. Определим тип точек поверхности.

Так как $K > 0 \Rightarrow$ то все точки поверхности — эллиптические.

13. Выясним изометрична ли поверхность:

а) плоскости ($K_{пл} = 0$).

$$K = \frac{4}{(4u^2+1)^2} \neq 0 \Rightarrow \text{поверхность не изометрична плоскости};$$

б) сфере ($K_{сф} = \frac{1}{R^2} = \text{const} > 0$).

$$K = \frac{4}{(4u^2+1)^2} \neq \text{const} \Rightarrow \text{поверхность не изометрична сфере}.$$

в) псевдосфере ($K_{пс} = \text{const}$).

$$K = \frac{4}{(4u^2+1)^2} \neq \text{const} \Rightarrow \text{поверхность не изометрична псевдосфере}.$$

14. Является ли поверхность минимальной?

$H \neq 0$, поверхность не является минимальной.

15. Запишем уравнения геодезических кривых на поверхности и определим их геометрические образы.

Найдем значения символов Кристоффеля:

$$\begin{cases} E \Gamma_{11}^1 + F \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} E_u = 0 \\ F \Gamma_{11}^1 + G \Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2} E_v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+4u^2) \Gamma_{11}^1 = 8u \\ u^2 \Gamma_{11}^2 = 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{8u}{1+4u^2}; \\ \Gamma_{11}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E \Gamma_{12}^1 + F \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} E_v \\ F \Gamma_{12}^1 + G \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} G_u \end{cases}; \quad \begin{cases} (1+4u^2) \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \cdot 0 \\ u^2 \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{12}^1 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+4u^2) \Gamma_{22}^1 = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2u \\ u^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{22}^1 = \frac{-u}{1+4u^2} \\ \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}. \text{Таким образом,}$$

$$A = \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = \frac{8uu'^2}{1+4u^2} - \frac{uv'^2}{1+4u^2};$$

$$B = \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = \frac{2u'v'}{u};$$

$$u''v' - v''u' + \left(\frac{8uu'^2}{1+4u^2} - \frac{uv'^2}{1+4u^2} \right) v' - \frac{2u'v'}{u} u' = 0,$$

$$\begin{cases} u'' + \frac{8uu'^2}{1+4u^2} - \frac{uv'^2}{1+4u^2} = 0, \\ v'' + \frac{2u'v'}{u} = 0. \end{cases} \quad \text{дифференциальные уравнения, определяющие}$$

геодезические линии.

Так как наша поверхность является поверхностью вращения, то геодезическими линиями являются меридианы: в данном случае u -линии, $v = \text{const}$: $\vec{r} = (c_1 u; c_2 u; u^2)$.

8. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Могут ли различные параметрические уравнения определять одну и ту же кривую?
2. Следует ли из непрерывности вектор-функции непрерывность ее координатных функций?
3. Следует ли из дифференцируемости вектор-функции дифференцируемость ее координатных функций?
4. Вытекает ли дифференцируемость вектор-функции из дифференцируемости ее модуля? Почему?
5. Является ли условие регулярности кривой достаточным условием существования касательной?
6. Каков геометрический смысл: а) кривизны; б) модуля кручения кривой?
7. Зависит ли кручение кривой от ее параметризации? Почему?
8. Будет ли кривая плоской, у которой в каждой точке кручение равно нулю, а в одной точке кручение неопределено? Почему?
9. Можно ли по кривизне кривой определить, является ли она отрезком прямой?
10. Что можно сказать о кривизнах в соответствующих точках подобных кривых?
11. Какие значения может принимать натуральный параметр на окружности радиуса 4?
12. Существует ли базис Френе в точках прямой?
13. Изменяется ли при переходе к новой параметризации в произвольной точке регулярной кривой вектор скорости?
14. Будет ли кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$ бирегулярной, если \vec{r}' и \vec{r}'' ненулевые векторы? Почему?
15. Как расположены вектор скорости и вектор ускорения в произвольной точке, если параметр на кривой натуральный?
16. Существует ли базис Френе в точках регулярной кривой? Почему?
17. Может ли кривизна быть равной нулю в одной точке кривой?
18. Для каких кривых можно построить базис Френе? Почему?
19. Какие существуют способы задания поверхностей?
20. Можно ли параметрическими уравнениями задать полностью всю сферу?
21. Каков геометрический смысл векторов: а) \vec{r}_u и \vec{r}_v ? б) $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$?
22. Могут ли две координатные линии касаться друг друга в некоторой точке регулярной кривой?
23. Какие кривые являются координатными линиями на плоскости: а) в декартовой системе координат? б) в полярной системе координат?
24. Меняются ли при замене параметров на поверхности координатные линии.
25. Каков геометрический смысл вектора $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$?
26. Каков геометрический смысл значений первой квадратичной формы на поверхности?

27. По каким формулам можно вычислить длину кривой на поверхности, угол между линиями на поверхности?
28. Меняется ли при замене криволинейных координат на поверхности: а) первая квадратичная форма поверхности? б) площадь поверхности? в) нормальный вектор к поверхности?
29. Каков геометрический смысл: а) значений второй квадратичной формы? б) модуля нормальной кривизны?
30. Дать определение главных кривизн и главных направлений на поверхности.
31. Может ли в точке поверхности быть ровно три главных направления?
32. Какой геометрический смысл имеет знак гауссовой кривизны?
33. Дать определение изометричных поверхностей.
34. Дать определение индикатрисы Дюпена.
35. Может ли индикатрисой Дюпена быть: а) парабола? б) окружность?
36. Является ли сфера минимальной поверхностью? Почему?
37. Две поверхности имеют одинаковые гауссовы кривизны в соответствующих точках. Являются ли они изометричными?
38. Изометричны ли локально сфера и плоскость?
39. Изменяется ли при изгибании поверхности: а) ее гауссова кривизна? б) вторая квадратичная форма? в) эйлерова кривизна?
40. Дать одно из определений геодезической линии на поверхности.
41. Какие кривые являются геодезическими: а) на сфере? б) на плоскости? в) цилиндре?
42. Сколько существует геодезических проходящих: а) через данную точку поверхности? б) через данную точку поверхности в данном направлении? в) через две точки поверхности?
43. Могут ли две геодезические касаться друг друга?
44. Сохраняется ли при изгибании поверхности свойство кривой быть геодезической?
45. Является кратчайшая линия геодезической?
46. Всякая ли геодезическая линия является кратчайшей?
47. Сформулировать основную теорему теории поверхностей.

9. ОБРАЗЕЦ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЯ

Образец модульной контрольной работы №1

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра высшей математики и методики преподавания математики

Образовательный уровень _____ бакалавриат _____

Направление подготовки: «Математика»

Семестр _____ 3 _____

Учебная дисциплина: Дифференциальная геометрия

ВАРИАНТ 1	
Вопросы по 2 балла	Найдите кручение эллипса.
	В каждой ли точке регулярной кривой можно провести касательную. Почему?
	Какие значения принимает натуральный параметр на окружности радиуса 4?
	Что можно сказать о кривизнах в соответствующих точках подобных кривых?
Вопросы по 5 балла	Вектор-функция одной переменной (определение) Предел вектор-функции. Свойства пределов вектор-функции.

	Доказать, что отрезок имеет минимальную длину среди всех кривых, которые соединяют его концы.
Вопросы по 7 баллов	<p>Дана кривая: $\vec{r} = (\sqrt{2}t + 1; e^{t-1}; e^{-t+1})$.</p> <p>а) является ли кривая регулярной в естественной области определения;</p> <p>б) найдите или оцените длину данной кривой или ее какого-то куска.</p> <p>в) составьте уравнения элементов трехгранника Френе в точке $(\sqrt{2} + 1; 1; 1)$;</p> <p>г) вычислите кручение данной кривой.</p>

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и методики преподавания математики

Протокол № __ от «__» _____ 202__ года

Заведующий кафедрой _____

Экзаменатор _____

Образец модульной контрольной работы №2

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра высшей математики и методики преподавания математики

Образовательный уровень _____ бакалавриат

Направление подготовки: «Математика»

Семестр _____ 3

Учебная дисциплина: Дифференциальная геометрия

ВАРИАНТ 1	
Вопросы по 2 балла	Дать определение простого куска поверхности
	Дать определение главных кривизн и главных направлений
	3. Дать определение координатных линий на поверхности
	4. Сформулировать основную теорему теории поверхностей.
Вопросы по 4 балла	5. Докажите, что геодезическими на сфере являются дуги больших окружностей.
	<p>Дана поверхность $\vec{r} = \{v \sin u; v + 2; v \cos u\}$</p> <p>Составьте уравнение нормали в точке с координатами $(\frac{\pi}{2}; 1)$.</p>
Вопросы по 9 баллов	<p>7. Вывести формулу для геодезической кривизны</p> $k_{\vec{a}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{3/2}} ((A + u'')v' - (B + v'')u')$

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и методики преподавания математики

Протокол № __ от «__» _____ 202_ года

Заведующий кафедрой _____

Экзаменатор _____

10. ОБРАЗЕЦ ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра высшей математики и методики преподавания математики

Образовательный уровень _____ бакалавриат

Направление подготовки: «Математика»

Семестр _____ 3

Учебная дисциплина: Дифференциальная геометрия

БИЛЕТ 1

- Вторая квадратичная форма поверхности.
- Верно ли, что $\vec{r}^2(t) = const.$ тогда и только тогда, когда $\vec{r}(t) \perp \vec{r}'(t)$?
- Существует ли функция обратная к функции $s = \int_0^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau$, если кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$ регулярна?
- Что можно сказать о кручении в соответствующих точках подобных кривых?
- Докажите, что кривая является винтовой линией, если ее кривизна равна 3, а кручение равно 5.
- Дана поверхность $\vec{r} = \{(u-1)\sin 2v; (u-1)\cos 2v; u\}$
 - Упростите уравнение поверхности с помощью замены координат.
 - Найдите угол между координатными линиями.
 - Укажите одну из главных кривизн в произвольной точке поверхности.
 - Изометрична ли поверхность сфере?
- Верно ли, что всякая геодезическая соединяющая две точки сферы является кратчайшей?
- Найти геодезические линии на геликоиде.

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и методики преподавания математики

Протокол № __ от «__» _____ 202_ года

Заведующий кафедрой _____

Экзаменатор _____

Критерии оценивания экзамена

Номер задания	Количество баллов
№1	10
№2	4
№3	4

№4	4
№5	4
№6 а)	4
№6 б)	4
№6 в)	4
№6 г)	4
№7	4
№8	4
Всего	50 баллов

11. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

В течение семестра обучающийся может заработать баллы за следующие виды деятельности: индивидуальное задание (домашние работы), самостоятельные и контрольные работы по практике, модульные контрольные работы по теории и практике (в общей сложности максимум 100 баллов), активность на занятиях, индивидуальные творческие задания (бонусные баллы). Экзаменационная работа оценивается после защиты максимум в 100 баллов. Оценка за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на экзамене и выставляется согласно шкале, принятой в ДонНУ. Более подробные критерии разрабатываются исходя из контингента и доводятся до ведома студентов в первый месяц обучения.

Ответ студента на экзамене оценивается одной из следующих оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», которые выставляются по следующим критериям.

Оценки «отлично» заслуживает студент, обнаруживший всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного и нормативного материала, умеющий свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоивший основную и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной кафедрой. Как правило, отличная оценка выставляется студентам, усвоившим взаимосвязь основных понятий курса, их значение для приобретаемой профессии, проявившим творческие способности в понимании, изложении и использовании учебного материала, знающим точки зрения различных авторов и умеющим их анализировать.

Оценка «хорошо» выставляется студентам, обнаружившим полное знание учебного материала, успешно выполняющим предусмотренные в программе задания, усвоившим основную литературу, рекомендованную кафедрой. Этой оценки, как правило, заслуживают студенты, демонстрирующие систематический характер знаний по дисциплине и способные к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.

На «удовлетворительно» оцениваются ответы студентов, показавших знание основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и в предстоящей работе по профессии, справляющихся с выполнением заданий, предусмотренных программой. Как правило, оценка «удовлетворительно» выставляется студентам, допустившим погрешности в ответе на экзамене и при выполнении заданий, не носящие принципиального характера, когда установлено, что студент обладает необходимыми знаниями для последующего устранения указанных погрешностей под руководством преподавателя.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студентам, обнаружившим пробелы в знаниях основного учебного материала, допускающим принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий. Такой оценки заслуживают ответы студентов, носящие несистематизированный, отрывочный, поверхностный характер, когда студент не понимает существа излагаемых им вопросов, что свидетельствует о том, что

студент не может дальше продолжать обучение или приступать к профессиональной деятельности без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

Шкала соответствия баллов национальной шкале

Сумма баллов за все виды учебной деятельности	Оценка ECTS	Оценка по национальной шкале
		для экзамена
90-100	A	5 (отлично)
80-89	B	4 (хорошо)
75-79	C	
70-74	D	
60-69	E	3 (удовлетворительно)
35-59	FX	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной сдачи
0-34	F	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной сдачи при условии обязательного набора дополнительных баллов

Разбалловка по дисциплине

1 модуль			СУММА	ИТОГО
Организационно-учебная работа студентов в аудитории	CPC	Контроль по модулю		100
Max 10	Max 15	Max 25	50	
2 модуль				
Организационно-учебная работа студентов в аудитории	CPC	Контроль по модулю		
Max 10	Max 15	Max 25	50	
Экзамен				
	Max 100		100	100

12. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА.

Лекционные и практические занятия проводятся в аудитории, оснащенной мультимедийной техникой и доской.

13. РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

№ п/п	Наименование	Кол-во экземпляров в библиотеке ДонНУ	Наличие электронной версии в ЭБС
Основная литература			
1.	Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Учебник. Изд. 5-е, испр. / П.К. Рашевский. – Москва : Изд-во ЛКИ, 2008. – 432 с.		+
2.	Феденко А.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии / А.С. Феденко – Москва : Издательство «Наука», 1979. – 272 с.		+
3.	Методические указания для проведения практических занятий по курсу «Дифференциальной геометрии и топологии» (Теория кривых и теория поверхностей). Составители: Н.В. Коваленко, А.В. Мазнев. – Донецк : ДонНУ. – 2017. - 151 с.		+
4.	Методические указания по курсу «Дифференциальной геометрии и топологии» (для студентов ОУ «Бакалавр» заочной формы обучения). Составители: Н.В. Коваленко, А.В. Мазнев, А.А. Лобунцова. – Донецк : ДонНУ. – 2018. – 70 с.		+
Дополнительная литература			
5.	Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия. Учебник. Изд. 3-е. – Москва : Изд-во ЛКИ, 2008. – 304		+
6.	Погорелов А.В. Геометрия. Учебное пособие для вузов. – 2-е изд.–Москва : Наука, 1984. – 288 с.		+

14. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

<http://www.mailcleanerplus.com/profit/elbib/obrlib.php> – электронная библиотека;

www.lib.mexmat.ru/books/41 – электронная библиотека механико-математического факультета МГУ;

www.exponenta.ru – Российский образовательный математический сайт.

Рабочая программа рассмотрена и переутверждена на заседании кафедры с изменениями (без изменений) на 20__ год.

Протокол заседания кафедры № ____ от « ____ » _____ 20__.

Зав. кафедрой _____

Рабочая программа рассмотрена и переутверждена на заседании кафедры с изменениями (без изменений) на 20__ год.

Протокол заседания кафедры № ____ от « ____ » _____ 20__.

Зав. кафедрой _____

Рабочая программа рассмотрена и переутверждена на заседании кафедры с изменениями (без изменений) на 20__ год.

Протокол заседания кафедры № ____ от « ____ » _____ 20__.

Зав. кафедрой _____

Рабочая программа рассмотрена и переутверждена на заседании кафедры с изменениями (без изменений) на 20__ год.

Протокол заседания кафедры № ____ от « ____ » _____ 20__.

Зав. кафедрой _____